შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

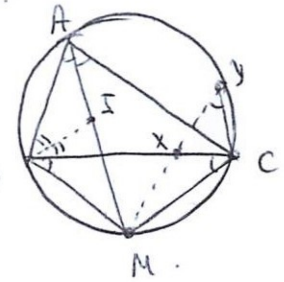
18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 1

გვერდი № 1.

ლემა 1: მოც $\triangle ABC$; I არის შიგ წრეწირის ცენტრი; $AI \cap \omega(ABC) = M$
მაშინ $IM = MB = MC$ და ამასთან თუ გავავლებთ წრფეს M-ზე რომელიც BC მონაკვეთს კვეთს X-ში და $\omega(ABC)$-ს Y-ში მაშინ $MX \cdot MY = MI^2$.

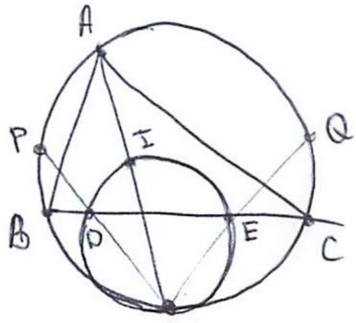
დამტკიცება:



ვაჩვენოთ $MB = MI$ ($MC = MB$ რადგან $\overset{\frown}{MB} = \overset{\frown}{MC}$)
$\angle A \equiv 2\alpha$ $\angle B \equiv 2\beta$ მაშინ $\angle BIM = \alpha + \beta$ (როგორც გარე კუთხე) და $\angle IBM = \angle IBC + \angle CBM = \beta + \alpha$
ანუ $\angle IBM = \angle BIM \Rightarrow MI = MB = MC$.
გავავლოთ MXY წრფე, შევაერთოთ YC და MC.

$\angle XCM = \alpha = \angle MYC \Rightarrow \triangle MYC \sim \triangle MCX \Rightarrow MX \cdot MY = MC^2 = MI^2$.
რ.დ.გ.

ამოხსნა:



ლემა 1-ის თანახმად $MI^2 = MD \cdot MP = ME \cdot MQ$
განვიხილოთ ინვერსია M ცენტრით და $R = MI^2$ რადიუსით მაშინ

$I \to I$
$E \to Q$
$D \to P$

რადგან $M \in \omega(DIE)$ ეს ნიშნავს რომ $I; Q; P$ ერთ წრფეზეა (რადგან თუ ინვერსიის ცენტრი არის წრეწირზე, მაშინ ეს წრეწირი გადადის წრფეში) რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

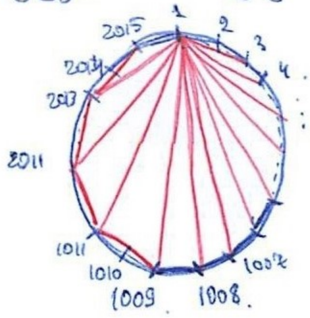
18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 2

გვერდი № 1.

დავამტკიცოთ რომ მაქსიმუმ შეიძლება 1509 Δ-ის მიღება, (2015 კუთხის)

ჯერ მოვიყვანოთ მაგალითი:



შევაერთოთ (1;3); (1;4); (1;5); ... (1;1008) და (1;1009).

ხოლო მერე ასევე შევაერთოთ

(1009;1011) (1011;1013) ... (2013;2015) და

(1;1011); (1;1013); ... ; (1;2015)

(1;1009) ქორდის მარჯვნივ არის 1007 სამკუთხედი

და ცხადია რომ ყველა განსხვავებულია (სულ სხვადასხვა წვეროები აქვთ) ხოლო

~~(1;1008;1009) სამკუთხედი ...~~ (1;1008;1009) სამკუთხედი ცხადია არაფრის

ტოლი არ არის. ამიტომ მარჯვნივ 1007 სამკუთხედია.

ახლა მარცხნივ: ცხადია რომ მარცხნივ არცერთი 2 ტოლი არაა (წვეროები აქვთ განსხვავებული), ხოლო (1;2014;2015) სამკუთხედის ტოლი არცერთი მარცხნივ სამკუთხედი არ არის ტოლი მარჯვნივ სამკუთხედის, რადგან მარცხნივ არცერთს არ აქვს 1-ის ტოლი გვერდი!

შესაბამისად მარცხნივ განსხვავებული Δ-ებია (1;1009;1011); (1;1011;1013); ...

– (1;2011;2013) რაც სულ არის ~~2013 - 2011 - 2013 - 1011 = 1002~~

~~2013 - 20~~ $\frac{(2013-1011+1)+1}{2} = \frac{1004}{2} = 502$. ანუ

ჯამში $1007 + 502 = 1509$ Δ-ია.

ახლა ვაჩვენოთ რომ ამაზე მეტი ვერ იქნება.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

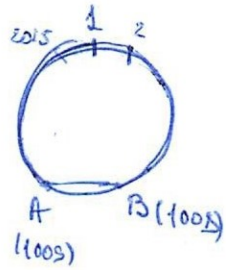
18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

ცხადია რომ ~~?~~ 2015-ის ყველა გვერდი იქნება რომელიღაც სამკუთხედის გვერდი!
დავაკვირდეთ რომ 2012 ცალი Δ-ს და ~~...~~ .
„შიგნითა" დავარქვათ სამკუთხედს რომლის ერთი გვერდი წერია 1-ის.
(წესიერი 2015 კუთხედის გვერდი უწერია 1-ის ტოლი), შესაბამისად რომელ სამკუთხედსაც არ აქვს 1-ის ტოლი გვერდი, იმას შიგნითა სამკუთხედი დავარქვათ.

1) შევნიშნოთ რომ მაქსიმუმ 1007 ცალი ერთგვერდიანი სამკუთხედი არსებობს. ეს ცხადია რადგან უწერია ის გვერდი რომელიც 1-ის ტოლია AB (ცხადია ეს იქნება 2015 კუთხედის გვერდი)



განვიხილოთ დარჩა 2013 წვერო და ჩვენ ერთერთი უნდა ავირჩიოთ X რომ ABX სამკუთხედი შევქმნათ. გადავნომროთ წვეროები B იყოს 1008, A იყოს 1009 და ეს გადანომრვა საათის ისრის მიმართულებით, რომ იმდენჯერ ნომერი 1-ია, ჰქონდა კი ეყოლება

მაშინ $2 \le i \le 1007$ $(A; B; i)$ სამკუთხედი ტოლია $(A; B; 2017-i)$ რადგან წვეროები i და $2017-i$ სიმეტრიულია AB-ს შუამართობის მიმართ ამიტომ სულ იქნება $i=1;2;\dots;1007$ ცალი ანუ 1007 ერთგვერდიანი სამკუთხედი (განსხვავებული)

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

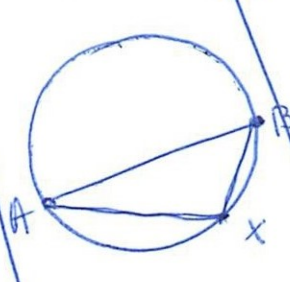
18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 2

გვერდი № 3

ახლა დავაკვირდეთ ბლაგვკუთხა სამკუთხედებს, მაშინ ცხადია რომ ამ სამკუთხედის [illegible] [illegible] [illegible] ამ 2015 [illegible] [illegible].

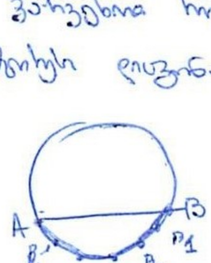
განვიხილოთ ~~[illegible]~~ ნებისმიერი [illegible] ამ [illegible] და დავაკვირდეთ უდიდეს [illegible] [illegible]: AB ~~ცხადია AB-ზე [illegible] [illegible] ABX [illegible]~~



[illegible] AB-ს [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible]:

ცხადია AB-ზე [illegible] ABX სამკუთხედი [illegible], დავაკვირდეთ ABX სამკუთხედს, თუ ის ბლაგვკუთხაა, [illegible] $BX=1$ [illegible] [illegible] AX [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], თუ არა ის ბლაგვკუთხა მაშინ BX [illegible] [illegible] [illegible] ამ 2015 [illegible] წერტილები, $B_1; B_2; \dots; B_t$

განვიხილოთ რომ k ნებისმიერი [illegible] [illegible] [illegible] სამკუთხედი რომელიც [illegible] [illegible] [illegible]: ავიღოთ AB [illegible] [illegible] და მის [illegible] [illegible] $B_1; B_2; \dots; B_t$ წერტილები.



ავიღოთ AB [illegible] [illegible] და მის [illegible] [illegible] $B_1; B_2; \dots; B_t$ წერტილები B თუ [illegible] [illegible] B_{x_1} [illegible] [illegible] BB_{x_1} [illegible] ~~[illegible] AB- [illegible]~~ რომელიც [illegible] AB [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ცხადია რომ [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] BB_{x_k}-ზე რომელიც [illegible] [illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 2

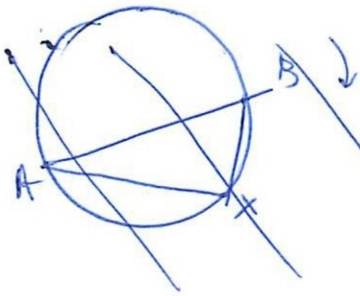
გვერდი № 4

~~[illegible] BB_2 [illegible]~~

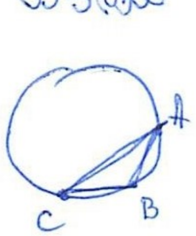
~~[illegible]~~

[illegible]

[illegible] AB [illegible] $\triangle$ [illegible], [illegible] ABB_{k_1}, [illegible] AB [illegible] BB_{k_1} [illegible] AB [illegible] BB_k [illegible] 1 [illegible] $BB_{k-1}B_k$ [illegible] AB [illegible]



[illegible] BXA [illegible] BX [illegible] $\triangle ABC$ [illegible] $\breve{AB}$-ს და $\breve{CB}$-ს [illegible] "[illegible]" [illegible] ABC [illegible] ABC [illegible]



შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2	18.04.2015/ მათ/I/ 418
ამოცანა № 2	გვერდი № 5

~~ასეთი იპიკეტურები ცხადია რომ ...~~

ახლა განვიხილოთ რომელიმე სხვა სამკუთხედი, ცხადია რომ მის ყველა წვეროში იქნება ტოლფერდა სამკუთხედის სამკუთხედი და ... მივიღებთ მას.

ასეთი ... ცხადია რომ მივიღებთ ... X ცალი სამკუთხედის სამკუთხედი გვექნება X ცალი  -ისეთი ტოლფერდა სამკუთხედი. და ნიშნავს რომ Y ცალი ... განსხვავებული ... ... მიიღებს X+Y ცალი განსხვავებული სამკუთხედი. ცხადია $2x+y \le 2012$ (რადგან $2x+y$ არის ... სამკუთხედები) → ანუ $x \le \frac{2012-y}{2}$

$$x+y \le \frac{2012-y}{2} + y = \frac{2012+y}{2}$$ და 1)-ში ვაჩვენეთ რომ

$$y \le 1007 \Rightarrow x+y \le \frac{2012+1007}{2} = \frac{3019}{2} =$$

$$= 1509{,}5 \Rightarrow x+y \le 1509$$

ანუ მაქს. 1509 არის პასუხი

პასუხი: 1509

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2	18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 3	გვერდი № 1

* ~~[illegible]~~

$n=2$ -სათვის $A_2=\{3;2\}$ ცხადია ამ რიცხვებით ყველა რიცხვი წარმოდგენადია გარდა 1-ის. A_n-სათვის საძიებელი რიცხვი (რომელიც არ წარმოდგენადია) აღვნიშნოთ B_n-ით. ინდუქციით დავუშვათ რომ ~~$B_{n-1}<3(2^{n-1})$~~ ~~$B_{n-1}<2^n+2^{n-1}-1$~~ $B_{n-1}<3\cdot 2^{n}-1$ და ვაჩვენოთ რომ ~~$B_n<3(2^{n+1}-1)$~~ ~~$B_n<3(2^n-1)$~~ ~~$B_n<2^{n+1}+2^n-1$~~ $B_n<3\cdot 2^n-1$

პირველი შევამჩნიოთ ის რომ A_n-ის მაქსიმალური კენტი წევრი არის 2^n-1. დავაკვირდეთ A_n-ის სხვა წევრებს: $(2^n-2;\ 2^n-4;\ \dots;\ 2^n-2^{n-1}) =$

$(2\cdot(2^{n-1}-1);\ 2\cdot(2^{n-1}-2);\ \dots;\ 2\cdot(2^{n-1}-2^{n-2}))$ ანუ A_n-ის ლუწი წევრები არის A_{n-1}-ის წევრები გამრავლებული 2-ზე. შესაბამისად, ცხადია რომ უდიდესი ლუწი რიცხვი, რომელსაც ვერ შევადგენთ A_n-ის ლუწი წევრებით არის $2\cdot B_{n-1}$.

ახლა ვიფიქროთ A_n-ის წევრებით რომ გვქონდეს რაიმე კენტი რიცხვის შედგენა (2^n-1) წევრი უნდა ვიყენოთ კენტჯერ: $1;3;5;\dots$

ანუ თუ გვინდა შევადგინოთ რაიმე კენტი რიცხვი $3\cdot(2^n-1)$ მდე მაშინ ~~[illegible]~~ (2^n-1)-ის წევრი უნდა ვყოთ მხოლოდ 1-ხელ.

ცხადია რომ 2^n-1+2B_{n-1}-ზე დიდ ნებისმიერ ~~[illegible]~~ რიცხვს შევადგენთ, ვინაიდან ~~[illegible]~~ A_{n-1}-ით შევადგინოთ B_{n-1}-ზე დიდი ყველა რიცხვი შესაბამისად ამ ყველა ლუწ რიცხვს შევადგენთ $2B_{n-1}$-ზე დიდს

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ზოლად ლუწი წვეროს ამოიღება, და ყველა კარგად შეფერადდება

2^n-1+ ლუწია $\geq 2B_{n-1}+2$. ანუ ვაჩვენეთ რომ 2^n-1+2B_{n-1}-ზე მეტს ყველა

ყველა რიცხვს ავაწყობთ, და ეხლა ვაჩვენებ რომ ამ რიცხვის მიღება შეუძლებელია მაშინ ეს ყოფილა ზუსტად მაქსიმუმი:

$$2^n-1+2B_{n-1}<5\cdot(2^n-1) \Leftrightarrow B_{n-1}<2^{n+1}-2$$

რაც სწორია.

ანუ თუ 2^n-1+2B_{n-1}-ის მიღება შეგვიძლია, როგორც დავინახეთ, (2^n-1) უნდა ავიღოთ ზუსტად 1-ხელ ან 3-ჯერ. $\Rightarrow$ $2B_{n-1}$-ის მიღება შეგვიძლია რაც წინააღმდეგობაა (თორემ მაშინ B_{n-1}-ზე შეფერადდება A_{n-1}-ში)

ანუ $B_n = 2^n-1+2B_{n-1}$.

ესეიგი $B_n<2^{n+1}-1 \Leftrightarrow 2B_{n-1}<2^n$.

თუ ავიღებ 1-ხელ მაშინ მივიღებ რომ $2\cdot B_{n-1}$-ის მიღება შეგვიძლია, რაც წინააღმდეგობაა, რადგან მაშინ A_{n-1}-ია შეფერადდება B_{n-1}-ს

და თუ ავიღებ 3-ჯერ

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 2

18.04.2015/ მათ/I/ 418

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

$2^n - 1 + 2B_{n-1} = 3 \cdot (2^n - 1)$

ანუ ვიღებთ ~~R~~ $B_n = 2^n - 1 + 2B_{n-1}$. სადაც $B_1 = 1$.